ANÁLISIS MATEMÁTICO II — UTN-FRBA

PRIMER CUATRIMESTRE — 1°RECUPERATORIO PRIMER PARCIAL

(15/7/2025)

Curso: Z2112

Apellido y nombre:

T1	T2	P1	P2	P3	P4	Calificación
/	/					

EJERCICIOS TEÓRICOS

T1) a) Definir extremos locales y absolutos de funciones escalares de dos variables en un punto.

b) Sea $f(x,y): D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2$ analizar la existencia de extremos relativos de $f(x,y)$ y de existir clasificarlos.

T2) Indicar si las siguientes proposiciones son V o F. Justifique claramente su respuesta.

a) El punto (3, 0, 0) es un punto regular de la curva de ecuación $C: \overline{X}(t) = (2t+1, t^2 - t, t^2 - 1)$ con $-4 \le t \le 4$

b) No existe $a \in \mathbb{R}$ tal que el gráfico de $f(x, y) = (1+y^2)(x^3 - 2ax^2 + 10)$ tiene plano tangente horizontal en el punto (2, 0, f(2, 0)).

EJERCICIOS PRÁCTICOS

P1) Sea $\varphi(x)$ la trayectoria ortogonal a la familia de curvas $kx = e^{-2y}$ en el punto (0,0), obtenga la ecuación de la recta tangente y del plano normal en el punto (-1,0-1) de la curva: $C: \begin{cases} y + z + x\varphi(x) = -2 \\ z - 4y = -1 \end{cases}$.

P2) Halle una aproximación lineal de función h en P= (1, 3, 4) , sabiendo que en un entorno de dicho punto $h = f \circ \overline{g}$, donde w = f(u, v) está definida implícitamente por la ecuación $2v + ue^{w-2} - w = -1$ en un entorno de $(-1, 1, w_0)$ y $\overline{g}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una función C^1 tal que $g(1,3,4) = (-1,1)$ y la $D\overline{g}(1,3,4) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

P3) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x.\text{sen}y}{y} & \text{si } y > 0 \\ xy & \text{si } y \le 0 \end{cases}$ .Analice la existencia de derivadas direccionales $f'((0,0);\breve{v})$.

Justifique la respuesta.

P4) Sea R_o la recta normal en A = (2 ,1,3) a la superficie S de ecuación $\overline{X} = (2u^2, v-u, v+u)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$; analice si R_o corta al plano x + y = z + 5; en caso afirmativo halle el punto de corte.

(resuelto por Sylvina)

AM2	1° parcial Candelas - Pavón	HOJA N° 1/3 FECHA 15-7-25

T1 a) Definir extremos locales y absolutos de funciones escalares de dos variables en un punto

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\bar{A} \in D$

$f_{(\bar{A})}$ es extremo local si $\forall (x,y) \in E_{\bar{A}}$: $f_{(A)} \geq f_{(x,y)} \to$ máx

o $f_{(A)} \leq f_{(x,y)} \to$ mín

$f_{(\bar{A})}$ es extremo global si $\forall (x,y) \in D$: $f(\bar{A}) \geq f(x,y)$

o $f(\bar{A}) \leq f(x,y)$

b) Sea $f(x,y): D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2$ analizar la existencia de extremos relativos de $f(x,y)$. De existir, clasificarlos

f es diferenciable $\Rightarrow$ busco (x,y) / $\bar{\nabla} f(x,y) = (0,0)$

$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 4x = 0 = 4x(x^2-1) \to x = 0 \text{ o } x = 1, x = -1 \\ f'_y = 2y = 0 \to \boxed{y=0} \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} PC_1 = (0,0) \\ PC_2 = (1,0) \\ PC_3 = (-1,0) \end{array}}$

Criterio del hessiano

$\left. \begin{array}{l} f''_{xx} = 12x^2 - 4 \\ f''_{xy} = 0 \\ f''_{yy} = 2 \end{array} \right\} H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$|H_{(0,0)}| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \to$ No hay extremo

$|H_{(1,0)}| = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$ hay extremo, $f''_{xx} > 0 \to$ es mínimo local

$|H_{(-1,0)}| = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$ hay extremo, $f''_{xx} > 0 \to$ es mínimo local

f alcanza mínimo relativo en $(1,0)$ y $(-1,0)$ y toma valor -1

NOTA

(resuelto por Sylvina)

$\boxed{T2}$ V o F

a) El punto $(3,0,0)$ es un punto regular de la curva de ecuación $C: \bar{X}(t) = (2t+1, t^2-t, t^2-1)$ con ~~t~~ $-4 \le t \le 4$

tomado en el final del 20-5-25

$$A=(3,0,0) = \bar{X}(t_0) = (\underbrace{2t_0+1}_{3}, \underbrace{t_0^2-t_0}_{0}, \underbrace{t_0^2-1}_{0}) \rightarrow t_0 = 1$$

$$\bar{X}'(t) = (2, 2t-1, 2t) \rightarrow \underbrace{\bar{X}(1) = (2,1,2) \neq (0,0,0)}_{\bar{A} \text{ es punto regular de } C}$$

$\boxed{V}$

b) No existe $\boxed{a \in \mathbb{R}}$ tal que el gráfico de $f(x,y) = (1+y^2)(x^3-2ax^2+10)$ tiene plano tang horizontal en $(2,0,f(2,0))$

tomado en el final de 20/5/25

$$f(x,y) = (1+y^2)(x^3-2ax^2+10) \quad , f \in C' \Rightarrow \text{busco } (x,y) \,/\, \bar{\nabla} f(x,y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 = (1+y^2)(3x^2-4ax) \rightarrow f'_x(2,0) = 12-8a = 0 \rightarrow \boxed{a = 3/2} \\ f'_y = 0 = 2y(x^3-2ax^2+10) \rightarrow f'_y(2,0) = 0 \end{cases}$$

$\exists \therefore \boxed{F}$

T2 $\frac{a}{b}$ → video: https://youtube/4uihBzej8Fo

(resuelto por Sylvina)

AM2	1° parcial	HOJA N° 2/3
	Cardenas - Pavón	FECHA 15-7-25

P1) Sea $\varphi(x)$ la trayectoria ortogonal a la flia $kx = e^{-2y}$ en el punto $(0,0)$ obtener la ec. de la recta tangente y del plano normal en el punto $(-1,0,-1)$ de C

$$C: \begin{cases} y+z+x\,\varphi(x) = -2 \\ z-4y=-1 \end{cases}$$

Tomado en el final de 25/2/25

↳ video: https://youtu.be/V1jcO1wX1c8

Hallo $\varphi(x)$: $kx = e^{-2y} \longrightarrow k = \dfrac{e^{-2y}}{x}$

$$k = e^{-2y}(-2y') = \frac{e^{-2y}}{x} \longrightarrow -2y' = \frac{1}{x} \rightarrow \boxed{y' = \frac{-1}{2x}}$$

$$y'_\perp = \frac{-1}{y'} = 2x \longrightarrow y_\perp = x^2 + c \xrightarrow{en (0,0)} \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \rightarrow 0 = 0 + c \rightarrow c = 0$$

$$\boxed{\varphi(x) = x^2}$$

$$C: \begin{cases} y+z+\overset{x\,x^2}{x^3} = -2 \\ z-4y=-1 \end{cases}$$

En el video (y en pdf en sylvina.netlify.app) lo hice de otra manera.
Allá lo resuelvo parametrizando la curva

$$\begin{cases} z = 4y-1 \\ z = -2-y-x^3 \end{cases} \rightarrow 4y-1 = -2-y-x^3 \rightarrow 5y = -1-x^3 \rightarrow \boxed{y = \frac{-1-x^3}{5}}$$

$$z = 4y-1 = \frac{-4-4x^3}{5} - 1 \rightarrow \boxed{z = \frac{-9-4x^3}{5}}$$

$$C: \bar{\gamma}(t) = \left(t, \frac{-1-t^3}{5}, \frac{-9-4t^3}{5}\right)$$

Recta tangente a C en $P = (-1,0,-1)$

$$\bar{\gamma}(t) = \left(t_0, \frac{-1-t_0^3}{5}, \frac{-9-4t_0^3}{5}\right) = (-1,0,-1) \longrightarrow \boxed{t_0 = -1}$$

$$\bar{\gamma}'(t) = \left(1, \frac{-3t^2}{5}, \frac{-12t^2}{5}\right) \longrightarrow \boxed{\bar{\gamma}'(-1) = \left(1, \frac{-3}{5}, -\frac{12}{5}\right)}$$

$$\boxed{\mathbb{L}: \bar{\beta}(t) = t(5,-3,-12) + (-1,0,-1) \quad t \in \mathbb{R}}$$

Plano Normal: $N(x,y,z) = N.P \rightarrow (5,-3,-12)(x,y,z) = (5,-3,-12)(-1,0,-1)$

$$\boxed{5x - 3y - 12z = 7}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

(P2) Hallar una aproximación lineal de la función h en $P=(1,3,4)$ sabiendo que en un entorno de dicho punto $h=f\circ\bar{g}$ donde $w=f(u,v)$ está definida implícitamente por la ec. $2v+ue^{w-2}-w=-1$ en un entorno de $(-1,1,w_0)$ y $\bar{g}: U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ es una función C^1 tal que $\bar{g}(1,3,4)=(-1,1)$ y la $D\bar{g}(1,3,4)=\begin{pmatrix}2&2&4\\-1&2&0\end{pmatrix}$

Tomado en el final del 20-5-25

↳ Video: https://youtu.be/gUNjRCrucxo

$h=f\circ\bar{g}$, $f\in C^1$ (definida implícitamente), $\bar{g}\in C^1$ (enunciado)

h es composic. de fun. diferenciable $\to Dh=Df(\bar{g})\,D\bar{g}$

$w=f(u,v)$ def. por $2v+ue^{w-2}-w=-1$ en un entorno $(-1,1,w_0)$

$2\times 1+(-1)e^{w_0-2}-w_0=-1 \to \boxed{w_0=2}$

$F(u,v,w)=2v+ue^{w-2}-w+1$

$F'_u=e^{w-2} \longrightarrow F'_u(-1,1,2)=1$

$F'_v=2 \longrightarrow F'_v(-1,1,2)=2$

$F'_w=ue^{w-2}-1 \to F'_w(-1,1,2)=-1$

$f'_u(-1,1)=-\dfrac{F'_u(-1,1,2)}{F'_w(-1,1,2)}=-\dfrac{1}{-1}$

$f'_v(-1,1)=-\dfrac{F'_v(-1,1,2)}{F'_w(-1,1,2)}=-\dfrac{2}{-1}$

$\boxed{f'_u(-1,1)=1}$ $\boxed{f'_v(-1,1)=2}$

$h=f\circ\bar{g}$ dif entonces:

$Dh(u,v,w)=Df(\bar{g}(u,v,w))\,D\bar{g}(u,v,w)$

$Dh(1,3,4)=Df(\bar{g}(1,3,4))\cdot D\bar{g}(1,3,4)=Df(-1,1)\cdot\begin{pmatrix}2&2&4\\-1&2&0\end{pmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&4\\-1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{h'_u}{0}&\underset{h'_v}{6}&\underset{h'_w}{4}\end{bmatrix}$

Aprox lineal:

$$s=\underbrace{h(1,3,4)}_{f(\bar{g}(1,3,4))=f(-1,1)=w=2}+\overbrace{h'_u(1,3,4)}^{0}(u-1)+\overbrace{h'_v(1,3,4)}^{6}(v-3)+\overbrace{h'_w(1,3,4)}^{4}(w-4)$$

Aprox. lineal de h en P: $\boxed{s=2+6(v-3)+4(w-4)}$

NOTA:

(resuelto por Sylvina)

AM2	1° parcial Candelias - Pavón	HOJA N° 3/3 FECHA 15-7-25

P3 Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,\text{sen}(y)}{y} & \text{si } y > 0 \\ x\,y & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$

Analizar la existencia de derivadas direccionales $f'((0,0);\check{v})$

$\check{v} = (\overset{x}{a}, \overset{y}{b})$ con $a^2+b^2=1$

$$f'((0,0),\check{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\check{v}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

• si $b>0 \rightarrow = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \cancel{h}a \overbrace{\frac{\text{sen}(hb)}{hb}}^{\to 1} = a \rightarrow \boxed{f'((0,0),\check{v}) = a \quad \text{si } b>0}$

• si $b \leq 0 \rightarrow = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \cancel{h}a\overset{\to 0}{hb} = 0 \rightarrow \boxed{f'((0,0),\check{v}) = 0 \quad \text{si } b \leq 0}$

$$\boxed{f'((0,0),\check{v}) = \begin{cases} a & \text{si } b>0 \\ 0 & \text{si } b \leq 0 \end{cases}}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

P4) Sea R_0 la recta normal en $A = (2,1,3)$ a la sup^s de ec. $\bar{X} = (2u^2, v-u, v+u)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
Analizar si R_0 corta al plano $x+y = z+5$. En caso afirmativo hallar el punto de corte

$$\bar{A} = \bar{X}_{(u_0,v_0)} = (2u_0^2, v_0-u_0, v_0+u_0) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2u_0^2 = 2 \\ v_0-u_0 = 1 \\ v_0+u_0 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} u_0=1 \\ v_0=2 \end{array}$$

$$\bar{A} = \bar{X}_{(1,2)}$$

Hallo R_0:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}'_u = (4u, -1, 1) \\ \bar{X}'_v = (0, 1, 1) \end{array}\right\rangle N = (-2, -4u, 4u)$$

en $A \longrightarrow N_{S_A} = (-2,-4,4)$

$\boxed{\text{uso } N_{S_A} = (1,2,-2)}$

$$\boxed{\mathbb{L}: \bar{\beta}(t) = (1,2,-2)t + (2,1,3) \quad t \in \mathbb{R}}$$

Hallo, si $\exists$, $P = \mathbb{L} \cap x+y=z+5$

$$\mathbb{L}: \bar{\beta}(t) = (\underbrace{t+2}_{x}, \underbrace{2t+1}_{y}, \underbrace{-2t+3}_{z})$$

$$x + y = z + 5$$

$$t+\cancel{2} + 2t+\cancel{1} = -2t+\cancel{3}+5$$

$$5t = 5 \rightarrow t=1$$

$$P = \bar{\beta}(1) = (3,3,1)$$

$$\boxed{P = (3,3,1)}$$

NOTA:

(resuelto por Sylvina)